Lezione 4

k-forme su M

$\Omega^k(M) = \{k\text{-forme su } M\}$ $\qquad$ $\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{k}$

Def: $\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M)$

è una algebra associativa (non commutativa)

ii

$\mathbb{R}$-sp. vettoriale, con prodotto $\wedge$

il prodotto si estende in modo ovvio con la proprietà distributiva

In $\mathbb{R}^n$: $\quad \Omega^*(\mathbb{R}^3) \ni (x\,dy + 2y\,dx \wedge dz) \cdot (dx \wedge dz)$

Def 1 Una orientaz. per M è $\mathcal{A}$ orientato

Def 2 " " " " è la scelta (loc. coerente) di una orientaz. per T_pM

$1 \Rightarrow 2$ $\mathcal{A}$ orientato per M $\rightsquigarrow$ orientaz. per T_pM

prendo $\varphi \in \mathcal{A}$ t.c. $\varphi : U(p) \to V \subseteq \mathbb{R}^n$

$$d\varphi_p : T_pM \xrightarrow{\sim} T_{\varphi(p)}V = \mathbb{R}^n$$

è orientato

INTEGRALI

$dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ $\Omega^k_c(M) = \{k\text{-forme a supp cpt}\}$

M^n orientata $\omega \in \Omega^n_c(M)$

Def: $\displaystyle\int_M \omega = ?$

Caso facile: $\operatorname{supp}\omega \subseteq U \xrightarrow[\varphi]{\sim} V \subseteq \mathbb{R}^n$ $\qquad \varphi \in \mathcal{A}$ orientato

$$\int_M \omega := \int_V \varphi_*(\omega) \quad \text{è definita} \qquad \varphi_* = (\varphi^{-1})^*$$

È ben def.: se $\operatorname{supp}\omega \subseteq U' \xrightarrow[\varphi']{\sim} V' \subseteq \mathbb{R}^n$ $\qquad \varphi' \in \mathcal{A}$ orientato

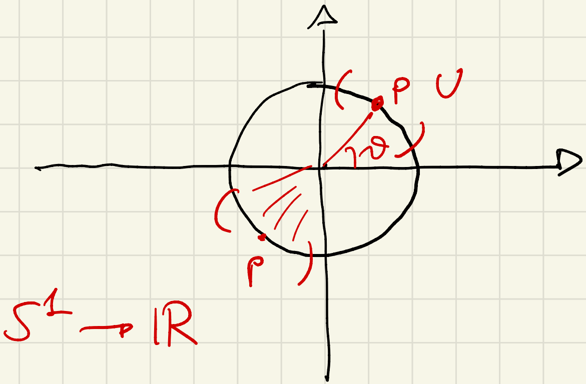
viene $$\int_V \varphi_*(\omega) = \int_{V'} \varphi'_*(\omega)$$

Torna perché " $\varphi' \circ \varphi^{-1} : V \xrightarrow{\sim} V'$ "

$$\det\left(d\left(\varphi' \circ \varphi^{-1}\right)\right) > 0$$

<u>In generale</u> : $T = S^1 \times S^1$

S^1

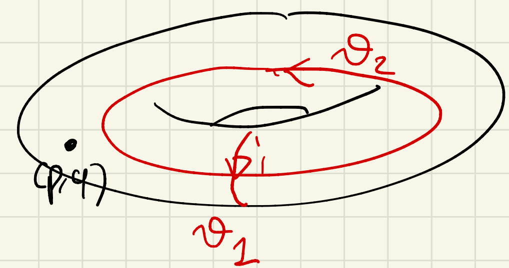


$\text{supp}\, d\vartheta = S^1$ $\quad d\vartheta \in \Omega^1(S^1)$

$\nexists\ \vartheta : S^1 \to \mathbb{R}$

$$\int_{S^1} d\vartheta \overset{?}{=} \;= 2\pi$$

$$T = \underset{\vartheta_1}{S^1} \times \underset{\vartheta_2}{S^1}$$



$$\omega = d\vartheta_1 \wedge d\vartheta_2$$

ϑ_1 è funz. localmente definita $\longrightarrow$ $d\vartheta_1$

(p,q) è globalmente definito

$$\int_T d\vartheta_1 \wedge d\vartheta_2 = 4\pi^2$$

PARTIZIONE DELL'UNITÀ

M^n $\quad \{U_i\}_{i\in I}$ ricoprimento aperto

Def: Una PARTIZIONE DELL'UNITÀ subordinata al ricoprimento è $\{\rho_i : M \to \mathbb{R}_{\geq 0} = [0,\infty)\}_{i\in I}$ t.c.

1) $\operatorname{supp} \rho_i \subseteq U_i$ $\quad$ ($\Rightarrow \rho_i(p) = 0 \ \forall p \notin U_i$)

2) è LOC. FINITA cioè

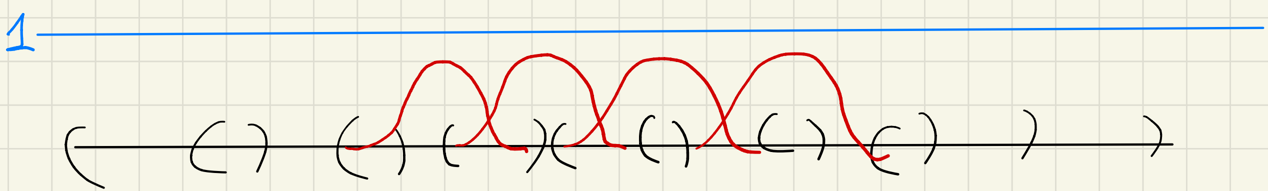
$\forall p \in M \ \exists U(p)$ t.c. $\rho_i|_U \not\equiv 0$ solo per un numero finito di $i \in I$

3) $\forall p \quad \sum_{i \in I} \rho_i(p) = 1$

è finita

Teo: $\exists$ sempre $(\forall M, \ \forall \{U_i\}_{i \in I})$

Es: $\mathbb{R} \quad \left\{ U_i = (i-2, i+2), \ i \in \mathbb{Z} \right\}$



A che serve? $\qquad M$ orientata

$\omega \in \Omega^n_c(M) \qquad \mathcal{A} = \{ \varphi_i : U_i \to V_i \}_{i \in I}$ orientato

$\{U_i\}_{i \in I}$ ric. $\longrightarrow \{\rho_i\}_{i \in I}$ partiz. unità

$$\omega = \sum_{i \in I} \rho_i \omega \qquad \boxed{\sum_{i \in I} \rho_i = 1}$$

$$\omega_i = \rho_i \omega \in \Omega_c(M)$$

$$\mathrm{supp}(\omega_i) \subseteq \mathrm{supp}(\rho_i) \subseteq U_i$$

Oss: supp ω cpt $\Rightarrow$ la somma è finita anche globalmente

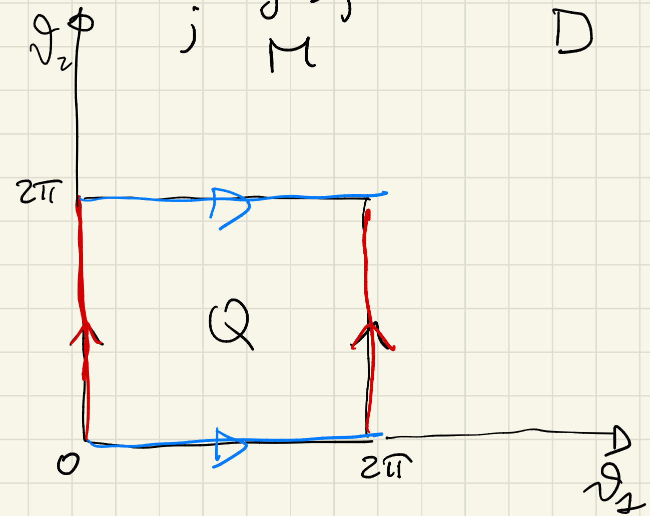
Def: $\displaystyle\int_M \omega = \sum_{i \in I} \boxed{\int_M \rho_i \omega}$ somma finita di numeri

$\leftarrow$ è definito

Prop: È ben definita $\{U_j'\}$ $\{\rho_j'\}$?

$$\int_M \omega = \sum_i \int_M 1 \cdot \rho_i \omega = \sum_i \int \sum_j \rho_j' \rho_i \omega$$

$$= \sum_{i,j} \int \rho_j' \rho_i \, \omega = \dots = \sum_j \int_M \rho_j' \, \omega \qquad \square$$



<u>Esempio</u>:

$$T = S^1 \times S^1$$

$$\omega = d\vartheta_1 \wedge d\vartheta_2$$

$$\int_T \omega = \int_Q d\vartheta_1 \wedge d\vartheta_2$$

$$Q = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$$

$$= \int_Q 1 = \text{Area}(Q) = (2\pi)^2$$

In generale, se $\omega \in \Omega^k_c(M)$ $\quad M^n \quad 0 \le k \le n$

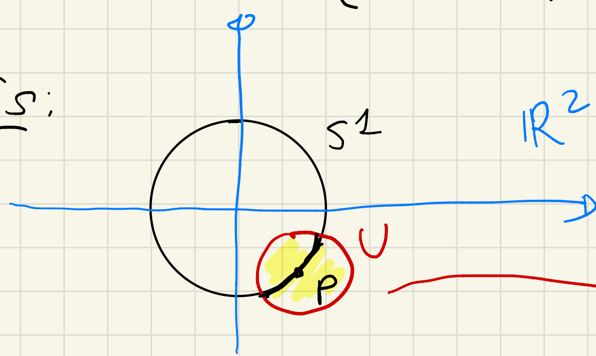
Data $N^k \subseteq M^n$ sottovarietà di dimensione k

Def: M^n $\quad N \subseteq M$ sottoinsieme è una k-sottovarietà se $\forall\, p \in N$ $\exists\, U(p) \subseteq M$ e una carta

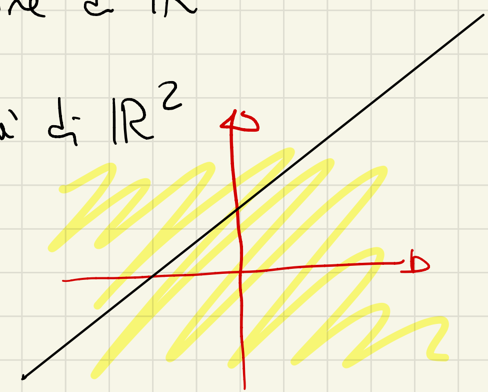
$$U(p) \xrightarrow[\sim]{\varphi} \mathbb{R}^n \quad \text{t.c.}$$

$\varphi(N \cap U)$ è un k-spazio affine di $\mathbb{R}^n$

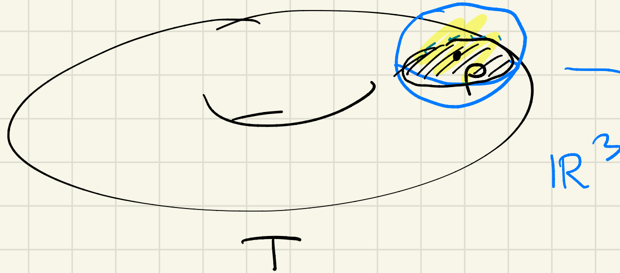
Es:

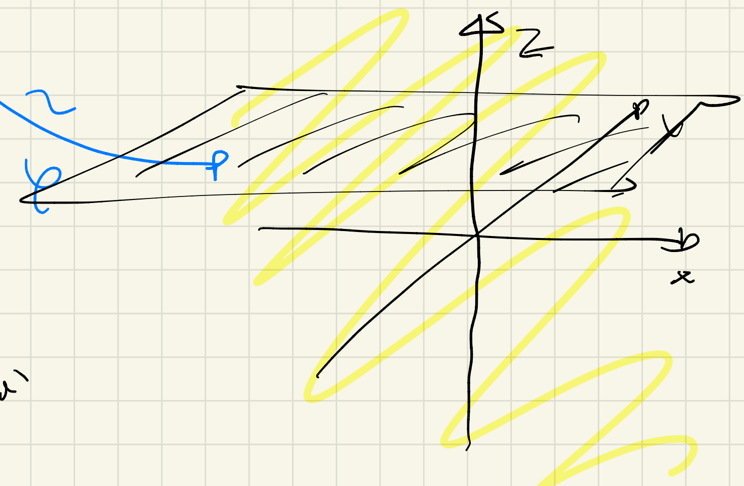


S^1 è sottovarietà di $\mathbb{R}^2$



Superficie := 2-varietà

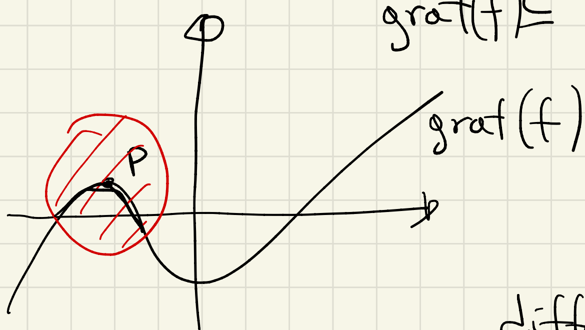




Oss: Ogni k-sottovarietà ha una naturale struttura di k-varietà

Esempio: $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ liscia

$\text{graf}(f) \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ è una m-sottovarietà



$$g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

$$(x, y) \mapsto (x, y + f(x))$$

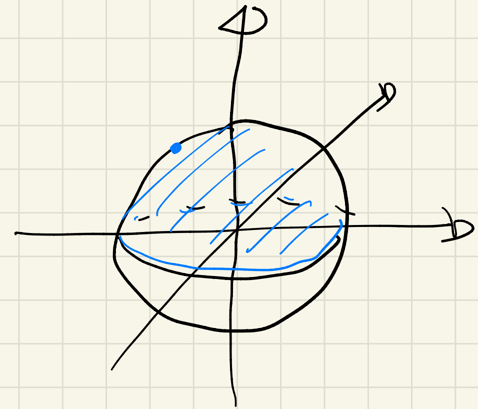
diffeom.

$$g^{-1}(x, f(x)) = (x, 0) \qquad g^{-1} \text{ funziona}$$

<u>Cor</u>: Ogni $S \subseteq \mathbb{R}^n$ che è loc. grafico di funzione è sottovarietà

<u>Cor</u>: $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ è sottovarietà

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$



Torniamo a M^n $\qquad \omega \in \Omega^k_c(M)$

$$N^k \subseteq M \qquad i : N \hookrightarrow M \text{ inclusione}$$

<u>Def</u>: $$\int_N \omega := \int_N i^* \omega$$

Esempio: $\omega = x\,dx \wedge dy - z\,dx \wedge dz$

$\int_{\mathbb{R}^3} \omega$ non ha senso

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie orientata $\quad \int_S \omega$ ha senso !

FORMA VOLUME

M^n orientata $\quad D \subseteq M \quad D$ apt

$\mathrm{Vol}(D) = ?$

Def: Una FORMA VOLUME su M è una n-forma positiva in ogni punto $p \in M$, cioè

$\forall p \in M$, $\forall v_1, \ldots, v_n \in T_pM$ base POSITIVA

$$\omega(p)(v_1, \ldots, v_n) > 0$$

<u>Oss:</u> In $\mathbb{R}^n$, $\omega = f\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$

è equivalente a $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Se M è dotata di una forma volume ω, posso definire

$$\mathrm{Vol}(D) = \int_D \omega \geq 0 \qquad \left(\int_M \omega \right)$$

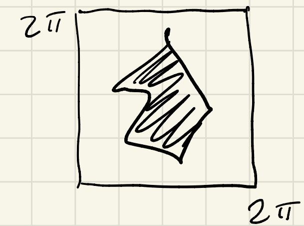
<u>Esempio:</u> $\mathbb{R}^n$, $\omega = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$

FORMA VOLUME EUCLIDEA

$\mathbb{R}^n$, $\omega = f\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$

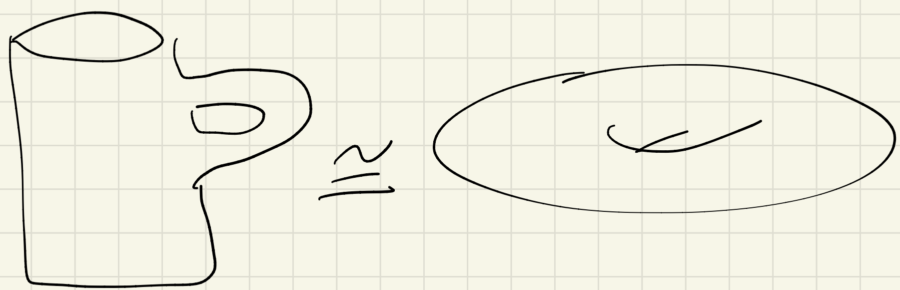
$$T = S^1 \times S^1$$

$$\omega = d\vartheta^1 \wedge d\vartheta^2$$



<u>Oss</u>: ω, ω' forme volume su M

$\Rightarrow \quad \omega' = f \cdot \omega \qquad f : M \to (0, \infty)$



$S^1 \times S^1$